前　言

高等数学是高等院校各专业重要的基础课，也是在自然科学、社会科学中广泛应用的数学基础.

本书按照教育部高等学校“工科类专业本科数学基础课程教学基本要求”，结合作者长期的高等数学教学实践，并在充分借鉴当前国内外同类教材的基础上编写而成. 在内容上突出了以下四个特点：

1. 简明实用、通俗易学. 略去了极限精确定义和一些抽象、烦琐的理论证明，直接地从客观世界所提供的模型和原理中导出基本概念，使表达更加简明、易于理解.

2. 突出基本概念和基本计算的教学. 在课程内容的编排上，注重明晰概念以及理清概念之间的内在联系，注重基本计算方法的系统掌握，并设置较多的例题、习题和综合练习来进一步强化.

3. 突出数学的应用性. 引导学生理解概念的内涵和背景，培养学生用高等数学的思想和方法分析、解决实际问题的能力.

4. 体现工科特色. 较多地设置了有关工程、机械、电子、能源、交通、食品工程、生物工程、环境工程以及经济管理等方面的实例，突出高等数学在工科专业中的应用，为学生学习专业奠定基础.

参加本书编写的有河南农业大学的曹殿立、马巧云、张建军、李艳华、白洪远、孙成金、张晓梅、禹仁贵，最后由曹殿立统一定稿.

东华大学的秦玉明教授仔细审阅了全稿，并提出了许多意见和建议，在此表示由衷的谢意！

对科学出版社为本书的顺利出版所付出的辛勤劳动表示衷心感谢！

虽然我们十分努力，但由于水平所限，难免存在不妥和疏漏之处，恳请读者批评指正.

编　者

2017 年 3 月 1 日

目　录

本书同步学习辅导教材《高等数学同步学习辅导》(下册)(曹殿立，苏克勤主编)注重课程内容的系统归纳与总结，突出典型例题的示范讲解，注重思路分析和方法归纳，提供主教材**全部习题及综合练习题的详尽解答**，含历年典型考研真题，提前体验典型考研题型.

同步学习辅导教材为您提供**知识总览**、**典型例题**、**历年考研典型真题**、**习题与综合练习题详解**等丰富教学内容，助您学有所成！

书名:《高等数学同步学习辅导》(下册)

书号:978-7-03-053852-9　定价:35.00 元

扫辅导书二维码，提高等数学成绩.科学出版社电子商务平台上本辅导书的购买二维码链接如下：

第 7 章　空间解析几何与向量代数

空间解析几何主要研究空间几何图形. 如同平面解析几何一样,它将"数"和"形"这两个数学的基本对象统一于一体,用代数方法研究和解决几何问题. 平面解析几何是一元函数微积分的基础,同样,空间解析几何也是学习多元函数微积分不可缺少的.

向量代数是解决数学、物理以及工程技术问题的有力工具. 本章首先引入空间向量的概念,通过建立空间直角坐标系给出向量的坐标,将向量的几何运算转化为向量坐标的代数运算,并以向量为工具研究空间平面和直线,最后介绍空间曲面、空间曲线以及二次曲面.

7.1　向量及其线性运算

7.1.1　向量的概念

我们把只有大小的量称为**数量**(或**标量**),如长度、质量、时间和温度等. 把既有大小又有方向的量称为**向量**(或**矢量**),如位移、速度、加速度、力等. 为区别于数量,通常用黑体字母或者上方加箭头的字母来表示向量,如 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{s}$,$\boldsymbol{v}$,$\boldsymbol{F}$ 或者 $\vec{a}$,$\vec{s}$,$\vec{v}$,$\vec{F}$ 等.

向量包含**两个要素**——大小和方向,故常用有向线段来表示向量. 有向线段的方向表示向量的方向,有向线段的长度表示向量的大小. 以起点为 M_1,终点为 M_2 的有向线段所表示的向量记作$\overrightarrow{M_1M_2}$(图 7.1). 如果有向线段$\overrightarrow{M_1M_2}$表示向量 $\boldsymbol{a}$,则称$\overrightarrow{M_1M_2}$是向量 $\boldsymbol{a}$ 的一个几何表示.

向量的大小,叫做向量的**模**. 有时也称为向量的**长度**. 向量 $\boldsymbol{a}$ 的**模**,记为$|\boldsymbol{a}|$,向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的模记为$|\overrightarrow{M_1M_2}|$.

两个向量**方向相同**,是指将它们移到同一起点时,它们在一条直线上,它们的终点都在起点的同一侧. 反之,若两个终点分别分布在起点的两侧,则称两向量**方向相反**. 图 7.2 中,向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 方向相同,向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{c}$ 或 $\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$ 方向相反.

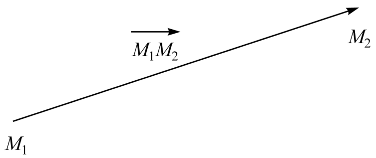

图 7.1

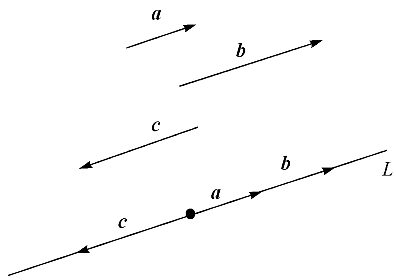

图 7.2

模等于零的向量叫做**零向量**,记作 **0**. 零向量的起点与终点重合,因此零向量的方向是任意的.

如果向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 的大小相等,方向相同,就称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ **相等**,记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 也就是说,如果两个有向线段的大小相等、方向相同,则不论它们的起点是否相同,就认为它们表示同一个向量. 这种仅依赖于大小和方向,而与起点位置无关的向量称为**自由向量**. 本书中若无特殊说明,均为自由向量.

由于自由向量可在空间中自由平移,因此两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角有如下定义:将 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平移,使它们的起点重合后,它们所在的射线正向之间的夹角 $\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**夹角**(图 7.3),记作$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$或$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$.

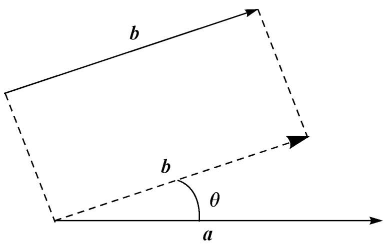

图 7.3

两个非零向量,如果它们的方向相同或者相反,就称这两个向量**平行**(或**共线**). 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行,记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$. 如果两个非零向量的夹角为$90^\circ$,就称这两个向量**垂直**(或**正交**),记作 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$. 由于零向量的方向可以看作是任意的,因此可以认为零向量与任意向量既平行又垂直.

类似于两向量共线,还有向量共面的概念. 设有 $k(k\geqslant3)$个向量,当把它们的起点放在同一点时,如果 k 个终点和公共起点位于同一个平面上,则称这 k 个向量**共面**.

显然,任意两个向量总是共面的.

7.1.2 向量的线性运算

7.1.2.1 向量的加法

设有两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$,任取一点 A,作$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,再以 B 为起点,作$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$,连接 AC,则向量$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$ 称为向量$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和(图 7.4),记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,即

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}.$$

上述作出两向量之和的方法称为向量相加的**三角形法则**.

容易看到,向量加法的三角形法则也适用于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行的情况.

若向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不平行,那么,也可以用如下**平行四边形法则**求它们的和. 以点 A 为起点,作$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$,以 AB,AD 为边作平行四边形 $ABCD$,连接对角线 AC,显然,向量$\overrightarrow{AC}$等于向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 这与物理学上求合力的平行四边形法则是一致的(图 7.5).

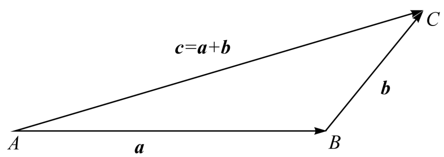

图 7.4

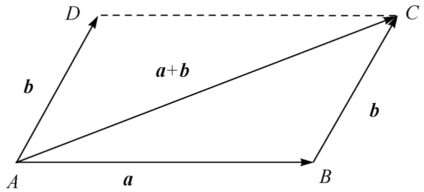

图 7.5

向量的加法满足下列运算规律:

(1) **交换律**　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

(2) **结合律**　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

对于(1),根据向量相加的三角形法则,由图 7.5,有

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a},$$

所以向量的加法满足交换律.

对于(2),如图 7.6 所示,先作出 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,再将其与 $\boldsymbol{c}$ 相加,即得和$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$,如将 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 相加,则得同一结果,所以向量的加法满足结合律.

由于向量的加法满足交换律和结合律,所以 n 个向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n(n\geqslant 3)$相加可写成 $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n$,并可按三角形法则相加如下:使前一向量的终点作为后一向量的起点,相继作向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$,再以第一向量的起点为起点,以最后一向量的终点为终点作一向量,这个向量即为这 n 个向量的和向量. 如图 7.7 所示,有

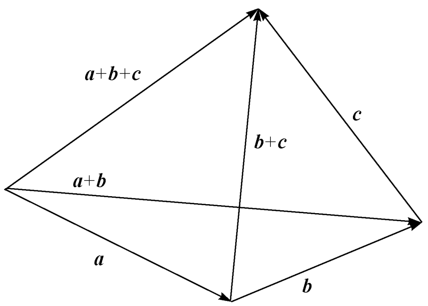

图 7.6

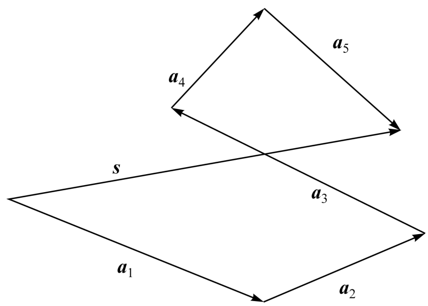

图 7.7

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4+\boldsymbol{a}_5.$$

设有向量 $\boldsymbol{a}$，称与 $\boldsymbol{a}$ 的模相等而方向相反的向量为 $\boldsymbol{a}$ 的**负向量**，记作 $-\boldsymbol{a}$. 由此，定义两个向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差为

$$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a}).$$

上式表明，向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差就是向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $-\boldsymbol{a}$ 的和. 特别地，有

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}.$$

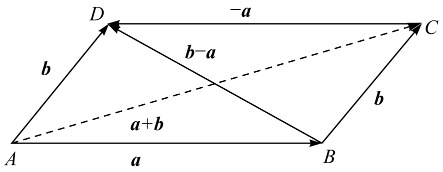

图 7.8

在平行四边形 $ABCD$ 中，以点 A 为起点，作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，如图 7.8 所示，则 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{CD}=-\boldsymbol{a}$. 按照向量和的三角形法则，显然对角线 BD 上的向量 $\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a})$，即 $\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$. 而另一对角线 AD 上的向量 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

7.1.2.2　数与向量的乘法

对任意的实数 λ 和向量 $\boldsymbol{a}$，λ 与 $\boldsymbol{a}$ 的乘积(简称**数乘**)记为 $\lambda\boldsymbol{a}$. 规定 $\lambda\boldsymbol{a}$ 是一个向量，它的模与方向定义如下：

(1) $\lambda\boldsymbol{a}$ 的模是 $\boldsymbol{a}$ 的模的 $|\lambda|$ 倍，即 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|$；

(2) 当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反.

当 $\lambda=0$ 时，$|\lambda\boldsymbol{a}|=0$，即 $\lambda\boldsymbol{a}$ 是零向量，$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，它的方向是任意的.

当 $\lambda=\pm1$ 时，$1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$，$(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$.

向量与数的乘法满足下列运算规律：

(1) **结合律**　$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$；

(2) **分配律**　$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$；　$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

这些运算规律都可以按照向量与数的乘法的定义来证明.

向量相加及数乘向量统称为**向量的线性运算**.

例 7.1　证明：三角形两边中点的连线平行于第三边，其长度等于第三边长度的一半.

证　如图 7.9 所示，在三角形 ABC 中，D，E 分别为边 AC 和 BC 的中点，即 $\overrightarrow{DC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{CE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$.

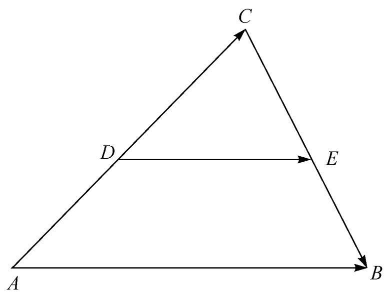

图 7.9

因 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}$，$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CE}$，则

$$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.$$

亦即$\overrightarrow{DE}/\!/\overrightarrow{AB}$且$|\overrightarrow{DE}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|$.

模等于 1 的向量叫做**单位向量**. 通常把与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 方向相同的单位向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量,记为 $\boldsymbol{e}_a$.

构造向量$\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$.

因$|\boldsymbol{a}|>0$,由数乘的定义,$\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相同;

再考虑$\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$ 的长度. 由数乘的定义,

$$\left|\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}\right|=\left|\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\right|\cdot|\boldsymbol{a}|=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\cdot|\boldsymbol{a}|=1,$$

即$\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$ 为单位向量.

综上所述,$\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$ 是一个与 $\boldsymbol{a}$ 方向相同的单位向量,因此

$$\boldsymbol{e}_a=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}\quad 或\quad \boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a.$$

注　一个非零向量与它的模的倒数的乘积是一个与原向量同方向的单位向量,这一运算称为将向量**单位化**.

由向量平行的定义,对于任意的实数 λ,向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 总是与 $\boldsymbol{a}$ 平行,因此可用向量与数的乘积来判定两个向量的平行关系.

定理 7.1　设向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$,则向量 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$ 的**充分必要条件**是存在唯一的实数λ,使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

证　条件的充分性由数乘的定义即得. 下面证必要性.

设 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$. 若 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$,则取 $\lambda=0$,即有 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}=0\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}$.

若 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$,取$|\lambda|=\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$,则

$$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|=\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}\cdot|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|,$$

且当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向时,取 $\lambda=\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$,当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向时,取 $\lambda=-\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$,故由向量相等的定义,有 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

如果另有实数 μ 满足 $\boldsymbol{b}=\mu\boldsymbol{a}$，则两式相减得

$$(\lambda-\mu)\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0},$$

从而 $|(\lambda-\mu)\boldsymbol{a}|=|(\lambda-\mu)|\cdot|\boldsymbol{a}|=0$，由于 $|\boldsymbol{a}|\neq 0$，故 $\lambda=\mu$.

我们知道，确定一条数轴，需要给定一个点、一个方向及单位长度. 由于单位向量既能确定了方向又确定了单位长度，因此，只需要给定一个点及一个单位向量就能确定一条数轴. 此原理是建立数轴的理论依据.

设点 O 及单位向量 $\boldsymbol{i}$ 确定了数轴，如图 7.10 所示，则对于数轴上任意一点 P，对应一个向量 $\overrightarrow{OP}$. 由于 $\overrightarrow{OP}/\!/\boldsymbol{i}$，由定理 7.1，必存在唯一的实数 x，使得

$$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i},$$

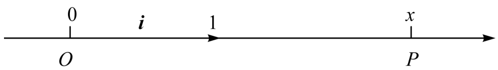

图 7.10

其中 x 称为数轴上有向线段 $\overrightarrow{OP}$ 的**值**. 这样，向量 $\overrightarrow{OP}$ 就与实数 x 一一对应. 从而

$$\text{点 } P \longleftrightarrow \text{向量 } \overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i} \longleftrightarrow \text{实数 } x,$$

即数轴上的点 P 与实数 x 一一对应. 我们定义实数 x 为数轴上点 P 的**坐标**.

习题 7.1

1. 设 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$，试用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 表示向量 $\boldsymbol{d}=2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}$.
2. 已知菱形 $ABCD$ 的对角线 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{b}$，试用向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 表示 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CD},\overrightarrow{DA}$.
3. 证明：对角线互相平分的四边形是平行四边形.

7.2 空间直角坐标系和向量的坐标

代数运算的基本对象是数，几何图形的基本元素是点，促成它们相互联系的是点的坐标. 在平面解析几何中，平面直角坐标系建立了平面上的点与有序二元实数组之间的一一对应关系，类似地，为了建立空间中的点与有序三元实数组之间的一一对应关系. 需要构建空间直角坐标系.

7.2.1 空间直角坐标系

在空间中任意选取一个定点 O，过点 O 作互相垂直的三条数轴 Ox，Oy，Oz，它们都以 O 为原点且有相同的单位长度，分别叫做 x 轴(横轴)，y 轴(纵轴)，z 轴(竖轴)，统称**坐标轴**. 三个坐标轴的正向符合右手法则，即以右手握住 z 轴，当右手的

四个手指从 x 轴的正向转过 $\frac{\pi}{2}$ 角度指向 y 轴的正向时，竖起的大拇指的指向就是 z 轴的正向(图 7.11). 这样的三条坐标轴组成了一个空间直角坐标系，称为 $Oxyz$ **坐标系**，点 O 称为**坐标原点**.

每两条坐标轴确定的一个平面，称为**坐标平面**. 由 x 轴和 y 轴确定的平面称为 xOy 平面，由 x 轴和 z 轴确定的平面称为 xOz 平面，由 y 轴和 z 轴确定的平面称为 yOz 平面. 三个坐标平面将空间分成八个部分，每个部分称为一个**卦限**，分别记为Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ，Ⅴ，Ⅵ，Ⅶ，Ⅷ，如图 7.12 所示.

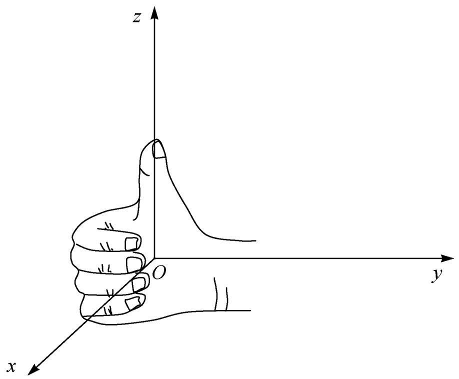

图 7.11

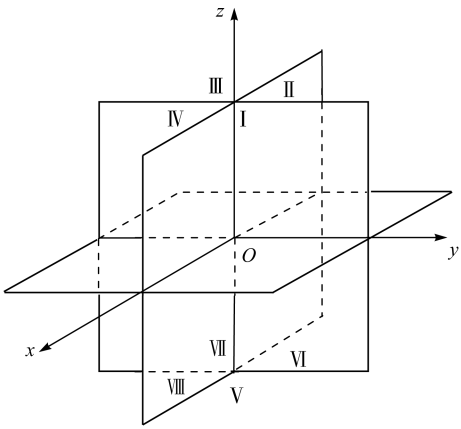

图 7.12

以空间直角坐标系为基础，可以确定空间中任一点的坐标.

设 M 为空间一点，过点 M 分别作垂直于 x 轴，y 轴和 z 轴的平面，这三个平面与三个坐标轴分别交于点 P,Q,R，如图 7.13 所示.

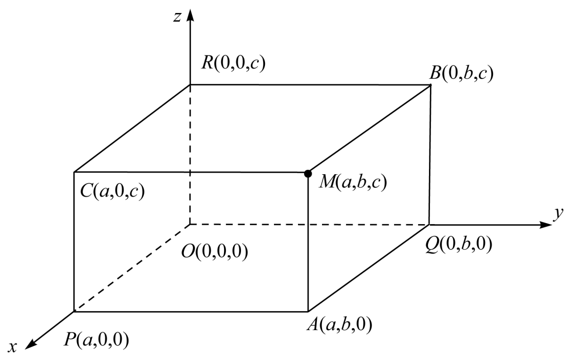

图 7.13

设这三点在 x 轴,y 轴,z 轴上的坐标依次取为 a,b,c,从而空间一点 M 就唯一确定了一个有序数组(a,b,c);反过来,已知一个有序数组(a,b,c),在 x 轴上取坐标为 a 的点 P,在 y 轴上取坐标为 b 的点 Q,在 z 轴上取坐标为 c 的点 R,然后通过点 P,Q,R 分别作垂直于 x 轴,y 轴,z 轴的平面. 这三个平面的交点 M 便是有序数组(a,b,c)所唯一确定的点. 这样,就建立了空间上的点 M 与有序数组(a,b,c)之间的一一对应关系.

称该有序数组(a,b,c)为点 M 的**坐标**,记为 $M(a,b,c)$,称 a,b,c 分别为点 M 的**横坐标**、**纵坐标**和**竖坐标**.

7.2.2 空间两点间的距离

已知空间两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$和 $M_2(x_2,y_2,z_2)$,过点 M_1 和 M_2 各作三个分别垂直于三条坐标轴的平面,这六个平面围成了一个以 M_1M_2 为对角线的长方体(图 7.14).

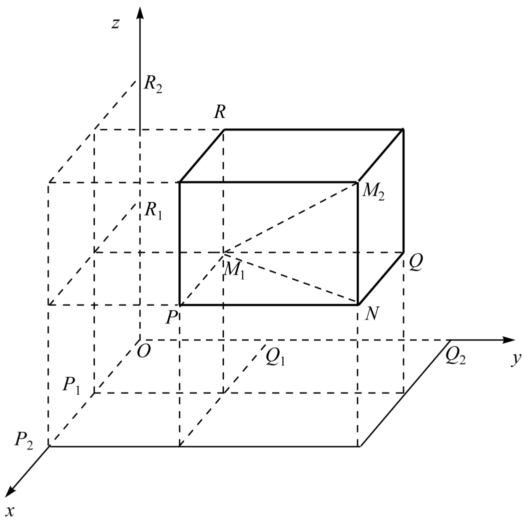

图 7.14

由于$\triangle M_1NM_2$ 为直角三角形,其中$\angle M_1NM_2$ 为直角,所以

$$|M_1M_2|^2=|M_1N|^2+|NM_2|^2.$$

又$\triangle M_1PN$ 为直角三角形,且

$$|M_1N|^2=|M_1P|^2+|PN|^2,$$

所以

$$|M_1M_2|^2=|M_1P|^2+|PN|^2+|NM_2|^2.$$

又由于

$$|M_1P|=|P_1P_2|=|x_2-x_1|,\quad |PN|=|Q_1Q_2|=|y_2-y_1|,$$
$$|NM_2|=|R_1R_2|=|z_2-z_1|.$$

所以点 M_1 和 M_2 之间的距离为

$$|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \tag{7-1}$$

特别地，空间一点 $M(x,y,z)$到原点 $O(0,0,0)$的距离为

$$|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}. \tag{7-2}$$

例 7.2　动点 $P(x,y,z)$与两定点 $A(1,-1,0)$，$B(2,0,-2)$的距离相等，求动点 P 的轨迹.

解　由题设，根据式(7-1)，得

$$(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=(x-2)^2+y^2+(z+2)^2,$$

即动点 P 的轨迹方程为

$$x+y-2z+3=0.$$

7.2.3　向量的坐标表示

7.2.3.1　向径的坐标

在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中，分别以 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 表示 x 轴，y 轴，z 轴上与该轴正向相同的单位向量. 任给向量 $\boldsymbol{a}$，通过平移使其起点位于坐标原点 O，终点记为 M，即 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{a}$.

以 OM 为对角线作长方体 $RHMK$-$OPNQ$（图 7.15），有

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}.$$

设点 M 的坐标为(a_x,a_y,a_z)，则 x 轴上点 P 的坐标为$(a_x,0,0)$，y 轴上点 Q 的坐标为$(0,a_y,0)$，z 轴上点 R 的坐标为$(0,0,a_z)$，故

$$\overrightarrow{OP}=a_x\boldsymbol{i},\quad \overrightarrow{OQ}=a_y\boldsymbol{j},\quad \overrightarrow{OR}=a_z\boldsymbol{k},$$

因此

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}. \tag{7-3}$$

该式称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**坐标分解式**，$a_x\boldsymbol{i},a_y\boldsymbol{j},a_z\boldsymbol{k}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 沿三个坐标轴方向的**分向量**.

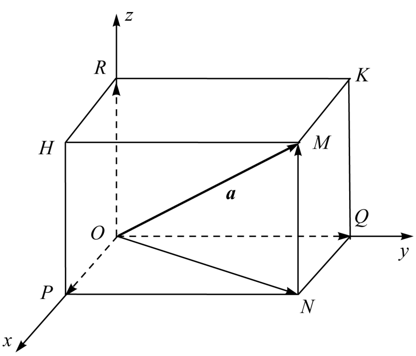

图 7.15

显然，给定向量 $\boldsymbol{a}$，就确定了点 M 及$\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{OQ}$，$\overrightarrow{OR}$三个分向量，进而确定了有序数组 a_x,a_y,a_z；反之，给定了有序数组 a_x,a_y,a_z，也就确定了向量 $\boldsymbol{a}$ 与点M. 于是向

量 $\boldsymbol{a}$ 与有序数组 a_x, a_y, a_z 之间存在着一一对应的关系：

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k} \longleftrightarrow \{a_x, a_y, a_z\}.$$

把有序数组 a_x, a_y, a_z 称为**向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标**，记为 $\boldsymbol{a}=\{a_x, a_y, a_z\}$. 显然

$$\boldsymbol{a}=\{a_x, a_y, a_z\} \Leftrightarrow \boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}.$$

一般地，空间中的任何一点 $P(x, y, z)$，都对应一个向量 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，称为点 M 的**向径**(图 7.16). 由向量坐标的定义知 $\boldsymbol{r}=\{x, y, z\}$，即一个点与该点的向径有相同的坐标. 为区别起见，记号 (x, y, z) 表示点 P 的坐标，$\{x, y, z\}$ 则表示向量 $\overrightarrow{OP}$ 坐标.

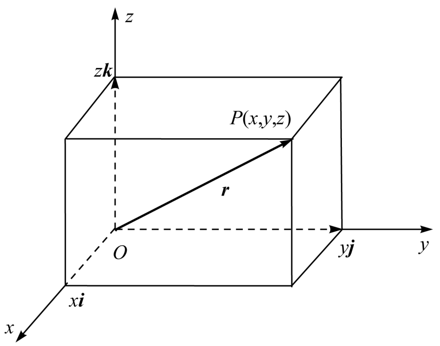

图 7.16

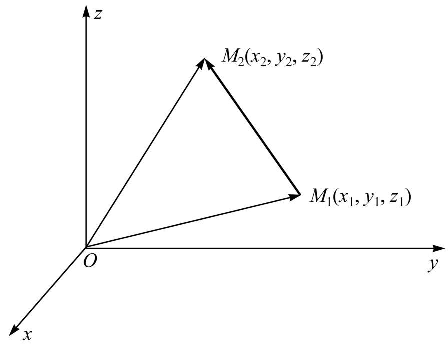

图 7.17

7.2.3.2 一般向量的坐标

设 $M_1(x_1, y_1, z_1)$，$M_2(x_2, y_2, z_2)$ 是空间中任意两点. 作向径 $\overrightarrow{OM_1}$，$\overrightarrow{OM_2}$，如图 7.17 所示，则

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}.$$

而 $\overrightarrow{OM_1}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k}$，$\overrightarrow{OM_2}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}$，由数乘向量的运算律，有

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_1M_2}&=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}\\&=(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})-(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\\&=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}\\&=\{x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1\},\end{aligned}$$

即

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1\}. \tag{7-4}$$

由此可见，**向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的坐标等于其终点 M_2 的坐标减去其起点 M_1 的坐标.**

例如，已知空间两点 $A(1,0,-1)$，$B(2,3,1)$，则

$$\overrightarrow{AB}=\{2-1,3-0,1-(-1)\}=\{1,3,2\}=\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}.$$

7.2.4 利用坐标进行向量的线性运算

利用向量的坐标，可以得到向量的加法、减法以及数乘向量的坐标表示.